



الف A

آمادگی کنکور ۱۴۰۰



دوپینگ ماز

@Doping_Maze | @BioMazeFree

@Doping_Maze | @BioMazeFree

آزمون دوپینگ ماز - ۱۴۰۰/۰۳/۱

دفترچه پاسخ ریاضی

مدت پاسخ گویی: ۴۷ دقیقه

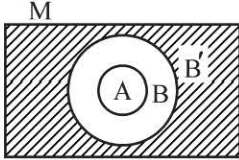
تعداد سؤال: ۳۰

طراح	ویراستار
مهرداد کیوان	میلاد حسینی نامی
حسین شفیع زاده	ارسلان حسنونند
	مهدی حاجی نژادیان

۱- اگر مجموعه ناتهی A زیر مجموعه B باشد، کدام دو مجموعه زیر، جدا از هم هستند؟

- (۱) A و B (۲) A و B' (۳) A' و B (۴) A' و B'

پاسخ: گزینه ۲



نکته: اگر $A \cap B = \emptyset$ آنگاه دو مجموعه A و B جدا از یکدیگرند.

یک نمودار ون مناسب رسم می کنیم:

با توجه به شکل مقابل B' و A هیچ اشتراکی ندارند، پس از هم جدا هستند.

۲- اگر $A \subset B$ باشد، ساده شده $(A - B') \cup (B - A')$ کدام است؟

- (۱) A (۲) B (۳) B - A (۴) $\emptyset$

پاسخ: گزینه ۱

$$A - B = A \cap B'$$

نکته: اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند:

$$\begin{cases} A \cap B = A \\ A \cup B = B \end{cases}$$

نکته: اگر $A \subset B$ آنگاه:

ابتدا عبارت داده شده را ساده می کنیم:

$$(A - B') \cup (B - A') = \underbrace{(A \cap B)}_A \cup \underbrace{(B \cap A)}_A = A \cup A = A$$

چون $A \subset B$ پس $A \cap B = A$.

۳- اگر $A' \subset B$ باشد، ساده شده $(B' \cup A') \cap (A' - B)'$ کدام است؟

- (۱) A' (۲) B (۳) B' (۴) $\emptyset$

پاسخ: گزینه ۱

نکته: اگر A و B دو مجموعه دلخواه در فضای S باشند، آنگاه:

$$\begin{cases} (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{cases} \quad A - B = A \cap B'$$

ابتدا عبارت داده شده را ساده می کنیم:

$$\begin{aligned} (B' \cup A') \cap (A' - B)' &= (B \cap A') \cap (A' \cap B')' \\ &= (B \cap A') \cap (A \cup B) = A' \cap \underbrace{B \cap (A \cup B)}_B = A' \cap B \end{aligned}$$

چون $A' \subset B$ پس: $A' \cap B = A'$ لذا جواب تست A' است.

۴- در یک کلاس ۴۵ نفری با ۲ رشته ورزشی، تعداد کسانی که در هیچ رشته ورزشی شرکت نکرده اند با تعداد کسانی که در هر ۲ رشته ورزشی شرکت کرده اند برابر است. اگر فقط ۳۵ نفر در یک رشته ورزشی شرکت کرده باشند، در این کلاس چند نفر ورزشکار داریم؟

- (۱) ۳۵ (۲) ۴۰ (۳) ۴۵ (۴) ۴۲

پاسخ: گزینه ۲

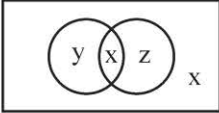


نکته: اگر A و B دو مجموعه در مجموعه مرجع S باشند، آنگاه:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

در حل برخی از این نوع تست‌ها، استفاده از نمودار شاید بهتر از استفاده از فرمول باشد. با توجه به اطلاعات داده شده ابتدا نمودار را به شکل مقابل فرض می‌کنیم اما:

۴۵



$$\begin{cases} y+z=35 \\ y+z+2x=45 \Rightarrow x=5 \end{cases}$$

پس تعداد ورزشکاران: $y+z+x=40$

۵- اگر مجموعه مرجع ۶ عضوی باشد و $n(A-B)=3$ و $n(B-A)=1$ باشد، بیشترین مقدار $\frac{n(B)}{n(A)}$ کدام است؟

$\frac{3}{5}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

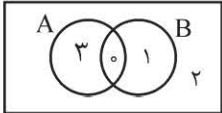
$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

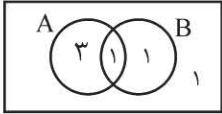
به کمک نمودار ون چند حالت در نظر می‌گیریم:

۶



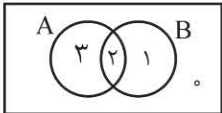
$$\Rightarrow \frac{n(B)}{n(A)} = \frac{1}{3}$$

۶



$$\Rightarrow \frac{n(B)}{n(A)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

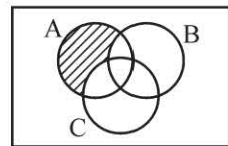
۶



$$\Rightarrow \frac{n(B)}{n(A)} = \frac{3}{5}$$

پس بیشترین مقدار $\frac{n(B)}{n(A)}$ همان $\frac{3}{5}$ است.

M



۶- قسمت سایه خورده کدام است؟

$A \cap B' \cap C'$ (۱)

$A - (B \cap C)$ (۲)

$(A-B) \cup (A-C)$ (۳)

$B' \cap C'$ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \text{ و } (A \cup B)' = A' \cap B' \text{ و } A - B = A \cap B'$$

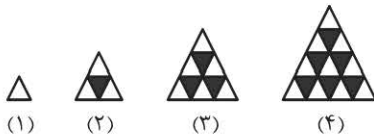
نکته:

با توجه به شکل داده شده، مجموعه داده شده $A - (B \cup C)$ است و مطابق خاصیت دمورگان داریم:

$$A - (B \cup C) = A \cap (B \cup C)' = A \cap B' \cap C'$$



۷- با توجه به الگوی مقابل، در شکل دهم چند درصد شکل رنگ آمیزی شده است؟



۴۲ (۲)
۴۵ (۴)

۳۶ (۱)
۴۰ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا الگوی مناسب را به دست می آوریم. مطابق جدول زیر داریم:

مرحله	۱	۲	۳	۴	n
تعداد کل مثلث	۱	۴	۹	۱۶	n^2
تعداد مثلث رنگی	۰	۱	۳	۶	$\frac{n(n-1)}{2}$

دقت کنید دنباله با الگوی درجه ۲، ۱، ۳، ۶، ...، ۲ یک الگوی مثلثی با جمله عمومی $\frac{n(n+1)}{2}$ است و دنباله ۰، ۱، ۳، ۶، ... نیز یک الگوی

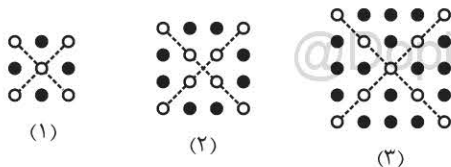
درجه ۲ مثلثی با قانون $\frac{n(n-1)}{2}$ است.

$$a_n = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$$

تعداد مثلث های رنگی را می توان به صورت زیر نیز محاسبه نمود:

$$\text{در شکل دهم} = \frac{10 \times 9}{10^2} = \frac{9}{10} = ۹۰\%$$

۸- با توجه به الگوی مقابل، در مرحله چندم تعداد نقاط تو خالی به ۶۱ می رسد؟



۲۵ (۱)
۲۷ (۲)
۲۹ (۳)
۳۱ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

تعداد نقاط تو خالی در شکل های ردیف زوج، یک عدد زوج است.

تعداد نقاط تو خالی در شکل های ردیف ۱، ۳، ۵ و ... به ترتیب ۵، ۹، ۱۳ و ... است. پس اگر n فرد باشد، تعداد نقاط تو خالی در شکل n برابر $2n+3$ است:

$$61 = 2n + 3 \Rightarrow n = 29$$

۹- در دنباله a_n رابطه $a_{n+1} = 2a_n + 1$ و $a_1 = 3$ بین جملات آن برقرار است. جمله نهم آن کدام است؟

۱۰۲۳ (۴)

۵۱۱ (۳)

۱۴۳ (۲)

۱۴۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

در این دنباله بازگشتی اگر جملات را مطابق رابطه داده شده و با توجه به جمله اول بنویسیم، داریم:

$$\begin{matrix} 3 & 7 & 15 & 31 & 63 & \dots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ 2^2-1 & 2^3-1 & 2^4-1 & 2^5-1 & 2^6-1 & \end{matrix}$$

با توجه به الگوی به دست آمده $a_n = 2^{n+1} - 1$ خواهد شد.

$$a_9 = 2^{10} - 1 = 1023$$



۱۰- اگر $a_n = 4n - 1$ و $b_n = 3n + 2$ دو الگوی خطی باشند، جمله ی چهل و هفتم دنباله b_n چندمین جمله دنباله a_n است؟

۴۲ (۴)

۴۵ (۳)

۳۶ (۲)

۳۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

برای یافتن جمله چهل و هفتم در دنباله b_n داریم:

$$b_{47} = 3 \times 47 + 2 = 143$$

جمله عمومی a_n را برابر عدد به دست آمده قرار می دهیم.

$$a_n = 143 \Rightarrow 4n - 1 = 143 \Rightarrow n = \frac{144}{4} = 36$$

۱۱- در دنباله درجه دوم $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ مقدار $a_{12} - a_1$ کدام است؟

۷۲ (۴)

۹۸ (۳)

۹۶ (۲)

۸۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

نکته: اگر تفاضل جملات متوالی دنباله درجه دوم را بیابیم، دنباله خطی به دست می آید. قدر نسبت دنباله خطی به دست آمده را نصف کنیم ضرب n^2 در معادله درجه ۲ به دست می آید.

$$\begin{array}{ccccccc} -1, & 3, & 11, & 23, & \dots \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ & 4 & 8 & 12 & \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ & 4 & 4 & 4 & \end{array}$$

نصف ۴ ضرب n^2 است، پس:

$$a_n = 2n^2 + An + B$$

$$\begin{cases} a_1 = 2 + A + B = -1 \\ a_2 = 8 + 2A + B = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n = 2n^2 - 2n - 1 \Rightarrow a_{12} - a_1 = 263 - 179 = 84$$

۱۲- در دنباله حسابی a_n جمله هفتم دو برابر جمله دهم است، حاصل $a_8 + a_{18}$ کدام است؟

صفر (۴)

۵۲ (۳)

۳۲ (۲)

۲۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

نکته: اگر a_n جمله عمومی یک دنباله حسابی باشد، آنگاه الگوی خطی دارد و $a_n = \alpha n + \beta$. البته می توانیم به صورت $a_n = a_1 + (n-1)d$ نیز جمله عمومی را بنویسیم.

با توجه به فرض داده شده داریم:

$$a_7 = 2a_1 \Rightarrow a + 6d = 2(a + d)$$

$$a + 6d = 2a + 2d \Rightarrow a + 4d = 0$$

از طرفی $a_8 + a_{18}$ خواسته شده است، پس:

$$a_8 + a_{18} = (a + 7d) + (a + 17d) = 2a + 24d = 2(a + 4d) = 2 \times 0 = 0$$

۱۳- جمله اول و دوم دنباله حسابی $a_n = 3n - 1$ به ترتیب جملات اول و قدر نسبت دنباله هندسی هستند. جمله چهارم دنباله هندسی کدام است؟

۶۴ (۴)

۱۲۵ (۳)

۲۴۰ (۲)

۲۵۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۱



در دنباله حسابی $a_n = 3n - 1$ داریم:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 5 \end{cases}$$

طبق فرض دنباله هندسی وجود دارد که $b_1 = 2$ و $q = 5$.در دنباله هندسی $b_n = b_1 q^{n-1}$ داریم:

$$b_4 = 2 \times 5^{4-1} = 2 \times 5^3 = 250.$$

۱۴- هرگاه در یک دنباله هندسی جمله اول ۳ و جمله دوم $\frac{3}{4}$ باشد، جمع جمله هفتم و هشتم کدام است؟

$$\frac{15}{128} \quad (۴)$$

$$\frac{9}{128} \quad (۳)$$

$$\frac{9}{64} \quad (۲)$$

$$\frac{15}{64} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳

در دنباله هندسی اگر a_1 و قدر نسبت (q) داده شده باشند، آنگاه $a_n = a_1 q^{n-1}$. ابتدا جمله عمومی دنباله هندسی را می‌یابیم:

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = \frac{3}{4} \Rightarrow q = \frac{1}{4}$$

$$a_1 = 3, q = \frac{1}{4} \Rightarrow a_n = a_1 q^{n-1} = \frac{3}{4^{n-1}}$$

به این ترتیب:

$$\begin{cases} a_7 = \frac{3}{4^6} \\ a_8 = \frac{3}{4^7} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_7 + a_8 = \frac{3}{4^6} + \frac{3}{4^7} = \frac{9}{4^6} = \frac{9}{128}$$

۱۵- برای اعداد متمایز و مثبت $a, b, c, \dots$ هرگاه $a, b, c, \dots$ دنباله هندسی و $a, 2b, 3c, \dots$ دنباله حسابی تشکیل دهند، قدر نسبت دنباله هندسی کدام است؟

$$2\sqrt{3} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (۳)$$

$$\sqrt{3} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳

نکته: شرط آنکه $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ تشکیل یک دنباله حسابی دهند آن است که $\alpha + \gamma = 2\beta$.و شرط آنکه $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ تشکیل یک دنباله هندسی دهند آن است که $\beta^2 = \alpha\gamma$.چون اعداد $a, b, c, \dots$ دنباله هندسی تشکیل می‌دهند $b^2 = ac$.چون $a, 2b, 3c, \dots$ دنباله حسابی تشکیل می‌دهند $4b = a + 3c$.

$$\left. \begin{aligned} b^2 &= ac \\ b &= \frac{a+3c}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(\frac{a+3c}{4} \right)^2 = ac$$



$$\Rightarrow a^2 + 9c^2 + 6ac = 16ac \Rightarrow a^2 - 10ac + 9c^2 = 0$$

$$(a-c)(a-9c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=c \\ a=9c \end{cases} \text{ چون } a \text{ و } c \text{ متمایز هستند، غقق} \Rightarrow a=9c \Rightarrow b = \frac{a+3c}{4} = 3c$$

اما قدر نسبت هندسی $q = \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ است، پس:

$$q = \frac{b}{a} = \frac{3c}{9c} = \frac{1}{3}$$

۱۶- در یک دنباله حسابی با قدر نسبت ۴ جملات اول و دوم و پنجم به ترتیب جملات یک دنباله هندسی هستند. جمله دهم دنباله حسابی چه عددی است؟

۶۲ (۴)

۵۸ (۳)

۳۸ (۲)

۴۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

دقت کنید، قدر نسبت دنباله حسابی ۴ داده شده و فرض می‌کنیم جمله اول a باشد، پس $a_n = a + 4(n-1)$ لذا $a_n = 4n + a - 4$ جمله عمومی دنباله است.

جملات اول، دوم و پنجم دنباله هندسی تشکیل می‌دهند، پس:

$$a_7 = a_5 a_1 \Rightarrow (8 + a - 4)^2 = (2 + a - 4)a$$

$$\Rightarrow (a + 4)^2 = a(a + 16) \Rightarrow a^2 + 8a + 16 = a^2 + 16a$$

$$a = 2 \Rightarrow a_n = 4n - 2 \Rightarrow a_{10} = 38$$

۱۷- نمودار توابع $f(x) = 4 + 4^x$ و $g(x) = 2^{x+3} - 8$ در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند، جمع طول نقاط تلاقی کدام است؟

$\log_2 12$ (۴)

$\log_2 6$ (۳)

۳ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

برای آنکه نقاط تلاقی در دو تابع را پیدا کنیم، کافی است دو تابع را برابر یکدیگر قرار دهیم.

$$2^{x+3} - 8 = 4 + 4^x$$

اگر فرض کنیم $2^x = A$ آنگاه برای معادله داریم:

$$8A - 8 = 4 + A^2 \Rightarrow A^2 - 8A + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ A=6 \end{cases}$$

$$A=2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x=1$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = 1 + \log_2 6$$

$$A=6 \Rightarrow 2^x = 6 \Rightarrow x = \log_2 6$$

$$x_1 + x_2 = \log_2 2 + \log_2 6 = \log_2 12$$

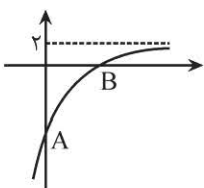
۱۸- نمودار تابع $f(x) = a - 2^{a-x}$ شکل مقابل است، فاصله دو نقطه A و B تا یکدیگر کدام است؟

$\sqrt{2}$ (۱)

$\sqrt{3}$ (۲)

۲ (۳)

$\sqrt{5}$ (۴)



پاسخ: گزینه ۴

با توجه به آنکه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{a-x} = 0$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (a - 2^{a-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a - 0) = a \Rightarrow a = 2$$

$$f(x) = 2 - 2^{2-x}$$

حال ضابطه f را می‌نویسیم:

$$f(0) = 2 - 2^2 = -2 \Rightarrow A \left| \begin{array}{c} 0 \\ -2 \end{array} \right.$$

پس:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2^{2-x} = 2 \Rightarrow 2-x=1 \Rightarrow x=1$$

از طرفی:

پس $B \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right.$ با داشتن دو نقطه A و B داریم:

$$AB = \sqrt{(0-1)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{5}$$

۱۹- نمودار توابع $f(x) = a + 2^{b-x}$ و $g(x) = 4 - x^2$ در دو نقطه به طول $x=0$ و $x=1$ متقاطع‌اند، مقدار $f(-3)$ کدام است؟

۱۸ (۴)

۱۷ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

دو معادله را مساوی هم قرار می‌دهیم و $x=0$ و $x=1$ را جایگزین می‌کنیم:

$$a + 2^{b-x} = 4 - x^2$$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow a + 2^b = 4 \\ x=1 \Rightarrow a + 2^{b-1} = 3 \end{cases}$$

@Doping_Maze | @BioMazeFree

دو معادله را کم می‌کنیم:

$$2^b - 2^{b-1} = 1 \Rightarrow 2^b - \frac{1}{2} 2^b = 1 \Rightarrow 2^b = 2 \Rightarrow b=1$$

$$\Rightarrow a + 2^1 = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = 2 + 2^{1-x} \Rightarrow f(-3) = 2 + 16 = 18$$

۲۰- تابع $f(x) = 1 + \log_2 x$ وارون خودش را در چند نقطه قطع می‌کند؟

هیچ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

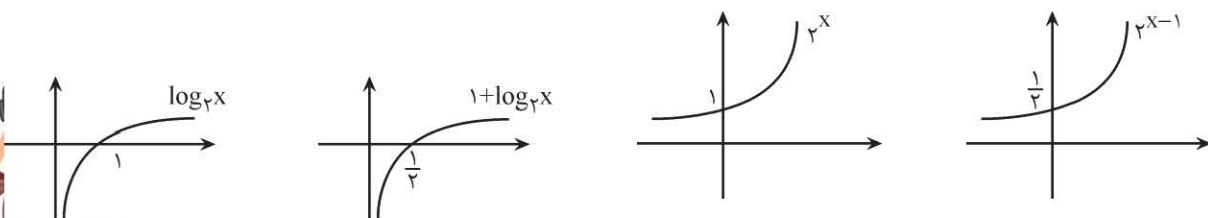
۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

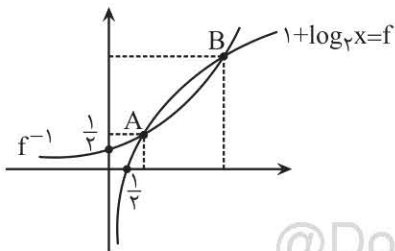
ابتدا ضابطه وارون تابع را پیدا می‌کنیم.

$$y = 1 + \log_2 x \Rightarrow y - 1 = \log_2 x \Rightarrow x = 2^{y-1}$$

پس $f^{-1}(x) = 2^{x-1}$. حال نمودار هر کدام را رسم می‌کنیم:



با کمی دقت معلوم می‌شود A در دو تابع $y=f(x)$ و $y=f^{-1}(x)$ صدق می‌کند. یعنی دو تابع یکدیگر را در A قطع می‌کنند. پس



باید در نقطه دیگری هم یکدیگر را قطع کنند و آن نقطه دیگر B است.

یعنی f و f^{-1} در دو نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.

@Doping_Maze | @BioMazeFree

۲۱- هرگاه $\log_9 x = \sqrt{0.125}$ مقدار $\log_x 27$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) ۳ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) -۳

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا معادله را به صورت یک معادله نمایی تبدیل می‌کنیم.

$$(\log_9 x)^{\log_9 x} = \sqrt{\frac{1}{8}} \Rightarrow 2^{\log_9 x} = 2^{-\frac{3}{2}}$$

با توجه به آنکه از $2^\alpha = 2^\beta$ برابری $\alpha = \beta$ نتیجه می‌شود، پس:

$$\log_9 x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\log_x 27 = \log_{3^{-1}} 3^3 = -3$$

به همین جهت:

۲۲- حاصل ضرب ریشه‌های $\log_2(x^2 + 7x) = 1 + 2\log_2(x+1)$ را α فرض کنیم، مقدار $\log(2\alpha^2 + \alpha)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $2\log_2(2)$ (۳) $2\log_2(3)$ (۴) $2\log_2(4)$

پاسخ: گزینه ۱

در ابتدا معادله را حل می‌کنیم.

$$\log_2(x^2 + 7x) = \log_2 2 + \log_2(x+1)^2 \\ \Rightarrow \log_2(x^2 + 7x) = \log_2 2(x^2 + 2x + 1)$$

چون $y = \log_2 x$ تابعی یک‌به‌یک است، پس:

$$x^2 + 7x = 2x^2 + 4x + 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow \alpha=2 \text{ هر دو جواب قابل قبول هستند.}$$

$$\Rightarrow \log(2\alpha^2 + \alpha) = \log 10 = 1$$

۲۳- هرگاه $\log 8 = a$ و $\log 15 = b$ مقدار $\log 3$ کدام است؟

- (۱) $1 - \frac{a}{3} - b$ (۲) $3a + b - 1$ (۳) $b + \frac{a}{3} - 1$ (۴) $3a - b + 1$

پاسخ: گزینه ۳



با توجه به ویژگی‌های لگاریتم و با توجه به رابطه $\log 5 = 1 - \log 2$ داریم:

$$\log 8 = a \Rightarrow \log 2^3 = a \Rightarrow \log 2 = \frac{a}{3}$$

$$\log 15 = b \Rightarrow \log 5 + \log 3 = b \Rightarrow 1 - \log 2 + \log 3 = b$$

$$\log 3 = b + \log 2 - 1 \Rightarrow \log 3 = b + \frac{a}{3} - 1$$

۲۴- هرگاه وارون تابع $f(x) = 4^x + 2^{x+1}$ تابع $y = \log_2 g(x)$ باشد، مقدار $g(\frac{9}{16})$ چه عددی است؟

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

$$\frac{9}{4} \quad (2)$$

$$\frac{5}{4} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

برای یافتن وارون یک تابع وارون‌پذیر، ابتدا x را بر حسب y پیدا می‌کنیم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$f(x) = (2^x)^2 + 2 \times 2^x \Rightarrow f(x) = (2^x + 1)^2 - 1$$

$$f(x) + 1 = (2^x + 1)^2 \Rightarrow 2^x + 1 = \pm \sqrt{f(x) + 1}$$

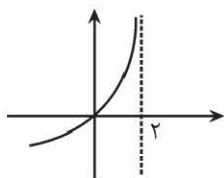
غقیق

$$2^x = \sqrt{f(x) + 1} - 1 \Rightarrow x = \log_2(\sqrt{f(x) + 1} - 1)$$

$$f^{-1}(x) = \log_2(\sqrt{x + 1} - 1)$$

$$g(x) = \sqrt{x + 1} - 1 \Rightarrow g(\frac{9}{16}) = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} - 1 = \frac{1}{4}$$

۲۵- نمودار تابع $f(x) = a - \log_2(b - ax)$ شکل مقابل است، با فرض $a \neq 1$ مقدار $b + a$ کدام است؟



$$10 \quad (1)$$

$$4 \quad (2)$$

$$6 \quad (3)$$

$$8 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به نمودار داده شده $D_f = (-\infty, 2)$ پس $x = 2$ ریشه داخل لگاریتم است، یعنی:

$$b - 2a = 0 \Rightarrow b = 2a$$

از طرفی نمودار تابع از مبدأ مختصات عبور کرده است، پس:

$$\log_2 2a = a \Rightarrow 2a = 2^a \begin{cases} a=1 & \text{غقیق} \\ a=2 & \Rightarrow b=4 \end{cases}$$

به این ترتیب: $a + b = 6$

۲۶- اگر انرژی آزاد شده در یک زلزله ۴۰ برابر شود، بزرگی زلزله چقدر بیشتر شده است؟ ($\log 2 = 0.3$)

$$\frac{3}{5} \quad (4)$$

$$\frac{12}{5} \quad (3)$$

$$\frac{1}{6} \quad (2)$$

$$\frac{16}{15} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱



نکته: اگر بزرگی زلزله برابر M و انرژی آزاد شده از آن E باشد، آنگاه $\log E = 11/8 + 1/5 M$

در ابتدا فرض می‌کنیم یک زلزله به بزرگی M با انرژی آزاد شده E به وقوع پیوسته باشد، پس:
اگر قرار باشد انرژی آن ۴۰ برابر شود پس باید بزرگی زلزله هم تغییر کند، فرض می‌کنیم k واحد به بزرگی زلزله اضافه شده باشد.

$$\log(40 \cdot E) = 11/8 + 1/5(M+k)$$

$$\log 40 + \log E = 11/8 + 1/5 M + 1/5 k$$

مطابق رابطه * رابطه آخر را ساده می‌کنیم:

$$\log 40 = 1/5 k \Rightarrow k = \frac{2}{3} \log 40$$

$$k = \frac{2}{3} (\log 4 + \log 10) \Rightarrow k = \frac{2}{3} ((2 \log 2) + 1)$$

$$k = \frac{2}{3} (1/6) = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}$$

۲۷- یک ماده شیمیایی در هر ۲۰ دقیقه $\frac{1}{5}$ آن از دست می‌رود، چقدر طول می‌کشد تا فقط $\frac{1}{10}$ از آن ماده باقی بماند؟

$$(\log 2 = 0.3)$$

(۲) ۳ ساعت و ۲۰ دقیقه

(۱) ۲ ساعت و ۴۰ دقیقه

(۴) ۴ ساعت و ۱۰ دقیقه

(۳) ۳ ساعت و ۴۰ دقیقه

پاسخ: گزینه ۲

چون هر ۲۰ دقیقه $\frac{1}{5}$ آن از دست می‌رود پس $\frac{4}{5}$ آن باقی می‌ماند. با توجه به آنکه قرار است نهایتاً $\frac{1}{10}$ مقدار اولیه (A) باقی بماند، پس رابطه زیر را داریم:

$$\frac{1}{10} A = A \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{n}{20}}$$

@Doping_Maze | @BioMazeFree

که n زمان مورد نظر است.

$$\frac{1}{10} = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{n}{20}} \Rightarrow \log_{\frac{4}{5}} \frac{1}{10} = \frac{n}{20}$$

$$\Rightarrow n = 20 \cdot (\log_{\frac{4}{5}} \frac{1}{10}) = 20 \times \frac{\log \frac{1}{10}}{\log \frac{4}{5}}$$

$$n = 20 \cdot \frac{-1}{\log 4 - \log 5} \Rightarrow n = \frac{-20}{(2 \log 2) - (1 - \log 2)}$$

$$n = \frac{20}{1 - 3 \times 0.3} = \frac{20}{.1} = 200 \text{ دقیقه}$$

۲۰۰ دقیقه یعنی ۳ ساعت و ۲۰ دقیقه.

تذکر: $\log 5 = 1 - \log 2$

۲۸- هرگاه $\log_2(1 + \log_2 x) = \log_5(1 + 5 \log_2 x)$ مجموع جواب‌های آن کدام است؟

(۴) ۵

(۳) ۱۲

(۲) ۱۰

(۱) ۹

پاسخ: گزینه ۱



نکته: می‌دانیم تابع $f(x) = \log_a^x$ تابعی یک‌به‌یک است، یعنی:

$$\log_a^{x_1} = \log_a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\log_{x_1}^a = \log_{x_2}^a \Rightarrow x_1 = x_2$$

علاوه بر آن اگر $a \neq 1$:

ابتدا برای حل معادله، پایه‌های لگاریتم را برابر خواهیم کرد.

$$\log_2(1 + \log_2^x) = \log_2(1 + 5 \log_2^x)$$

$$\Rightarrow \log_2(1 + \log_2 x) = \frac{1}{2} \log_2(1 + 5 \log_2 x)$$

$$\Rightarrow \log_2(1 + \log_2 x)^2 = \log_2(1 + 5 \log_2 x)$$

اگر فرض کنیم $\log_2 x = A$ آنگاه با توجه به یک‌به‌یک بودن تابع لگاریتم داریم:

$$(1 + A)^2 = 1 + 5A \Rightarrow A^2 + 2A + 1 = 1 + 5A$$

$$\begin{cases} A = 0 \Rightarrow \log_2 x = 0 \Rightarrow x = 1 \\ A = 3 \Rightarrow \log_2 x = 3 \Rightarrow x = 8 \end{cases} \Rightarrow S = x_1 + x_2 = 9$$

۲۹- اگر $\log_a ab = 3$ باشد، مقدار $\log_{ab} b^3$ کدام است؟

۱ (۴)

۲/۵ (۳)

۲ (۲)

۱/۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

نکته:

$$۱) \log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

$$۲) \log_b a^n = n \log_b a$$

$$۳) \log_b^m a = \frac{1}{m} \log_b a$$

$$۴) \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

$$۵) \log_b a = \frac{\log a}{\log b}$$

حال به کمک این ویژگی‌ها، مسأله را حل می‌کنیم.

$$\log_a^2 ab = \frac{\log a + \log b}{\log a^2} = \frac{\log a + \log b}{2 \log a} = 3 \Rightarrow \log b = 5 \log a$$

$$\log_{ab} b^3 = \frac{\log b^3}{\log ab} = \frac{3 \log b}{\log a + \log b} = \frac{3(5 \log a)}{\log a + 5 \log a} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

۳۰- به فرض آنکه $\log_3 4x = \log_3 x$ حاصل مجموع جواب‌های معادله کدام است؟

صفر (۴)

۱۳/۱۲ (۳)

۳/۸ (۲)

۴/۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳



$$\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$$

نکته:

ابتدا معادله را به حالت ساده‌تری تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{\log 4x}{\log 3} = \frac{\log 4}{\log 3x} \Rightarrow \frac{\log 4 + \log x}{\log 3} = \frac{\log 4}{\log 3 + \log x}$$

اگر فرض کنیم $A = \log x$ آنگاه:

$$(A + \log 4)(A + \log 3) = (\log 4)(\log 3)$$

$$\Rightarrow A^2 + (\log 4 + \log 3)A + (\log 3)(\log 4) = (\log 3)(\log 4)$$

$$\begin{cases} A = 0 \Rightarrow \log x = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -(\log 3 + \log 4) \Rightarrow \log x = -\log 12 = \log \frac{1}{12} \Rightarrow x = \frac{1}{12} \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = 1 + \frac{1}{12} = \frac{13}{12}$$

@Doping_Maze | @BioMazeFree

